平成２８年４月２４日
小野寺利浩

「（続）今だからできること」（不規則の中の規則性）

１．まえがき

若いころよく先輩達からからかわれ半分で「いたる所連続でいたる所微分不能な関数があるんだぜ」そんな関数あるのか？？？有ったら見せてくれと言っても具体的に教えては貰えませんでした。だから私はそんな関数は無いと思っていました。

ところがつい先ごろ、ある数学のサークルに参加し、私の当番輪講で「酔歩運動、ウィーナ過程（ブラウン運動）そして確率積分まで」を割り当てられました。まだ現役のころ、カルマンフィルタを使って雑音の乗っている系でも、ある程度雑音の影響を抑圧して真値を推定することをしていましたので気軽に引き受けた訳です。

２．ウィーナ過程 1),2)

そのウィーナ過程こそが至る所微分不能で至る所連続な関数だったのです。
そもそも酔歩運動は酔っ払いが一歩進む度にサイコロを振って自分が行く方向を決め、次々と同じことを繰り返してゆく運動ですから何時までたっても出発点付近でもたもたしている場合、適当に行きつ、戻りつして何れ何処かへ行ってしまうものなどさまざまな経路をたどる訳です。そのどれかひとつの経路を歩み（時間）と対応させてグラフにした関数を作ります。そしてその歩みの一歩一歩を無限に細かくしたのがウィーナ過程と言っていました。するとこのウィーナ過程こそが「至る所微分不能で至る所連続な関数である
ことに気が付きました。このように僅か数行で定義できることがらだからやはり私は先輩達にからかわれていたことになります。

とことろが、この不規則性の中にも規則性あるので驚きです。さきの酔っ払い行動の軌跡の全てが時間の経過とともに広がってゆく先端部は拡散方程式で表現されるのです。

だから山本先生も「酔っ払いは必ず自宅に帰りつくことができる」といっておられたことを思い出します。酔っ払いの辿る経路の任意の一点における確率密度はその点に集まる一歩前の複数の確率密度に依存することに着目して微分方程式を作るとなんとこれが拡散方程式になるじゃありませんか。拡散方程式は我々の教科書シャイブの「半導体工学」で電子の拡散を扱うときに慣れ親しんでいましたので親しさ半分、懐かしさ半分です。

３．確立積分 3)

つぎはいよいよ確率積分に入ります。確率積分は積分変数が確率変数になる積分で、伊藤積分とかストラトノビッチ積分を指しています。日本人が確立した積分ですのでたいへん誇らしいくもあります。

これも先ほどの酔歩運動と深く関わっています。一歩進むごとに行き先が不規則ですからその確率変数の増分も不規則なのでどうしようもありません。しかしここで再び規則性のあるところを探します。説明を簡単にするために一次元のウィーナ過程で進めます。一次元ですと“行くか戻るか”のどちらかですからそれらの増分は正か負かのどちらかしかありません。そこで増分の二乗を時間の経過とともに並べてみますと全部正となり積み重なって行きます。すなわち縦軸に増分の二乗、横軸に時間をプロットしたグラフを作りますと一つの直線状に並ぶことになります。そうすると増分の二乗和は時間の和分に等しくなり、此の事情はわれわれが高校で教わってきた積分とことなるところです。

このように確率変数の積分が意味を持ちましたので確率変数を含む微分方程式も意味を持ち、電気工学のみならず株価の変動を扱うなど他の分野でもいろいろ使われているようです。

４．あとがき

　不規則だったら手も足もでないというのではなく、不規則の中にも規則性があり、または見つけそれらを手掛かりに困難に立ち向かって行く工学の力強さを見るとき私達に大きな勇気や感動さえ与えてくれます。

参考図書

１）林克行「大学でどのような数学を学ぶのか」（株）評論社　２００２年５月１０日
２）村上雅人「なるほど確率論」海鳴社　２００８年８月３０日
３）ベアーント・エクセンダール、谷口説男訳「確率微分方程式」シュプリンガー・フェアラーク東京株式会社　１９９９年１１月１１日